2014年　東大理系数学　第6問（包絡線）

包絡線で解く

方針：(*)の式を、パラメータであるpで微分した式を (**) とすると
(*)と(**)の連立方程式を解き、
pを消去する。

(*)を $q = p - 3$ を代入して、整理すると、

$$t = -\frac{2\sqrt{3}}{3}p^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}(s+3)p - \sqrt{3}s$$

pで微分

$$0 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \times 2p + \frac{2\sqrt{3}}{3}(s+3) \times 1 + 0$$

$\Leftrightarrow \quad p = \frac{s+3}{2}$ (**)　◀これが接点。$p = \frac{s+3}{2}$ で接する。

(*)に代入すると、

$$t = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{s+3}{2}\right)^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}(s+3) \times \frac{s+3}{2} - \sqrt{3}s$$

$\Leftrightarrow \quad t = \frac{\sqrt{3}}{6}s^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$　◀(*)が常に接する曲線

また、①$\Leftrightarrow$ $1 \leqq p \leqq 2$ より　$p = \frac{s+3}{2}$ (**)を代入し、

$$1 \leqq \frac{s+3}{2} \leqq 2 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leqq s \leqq 1$$

接する範囲

以上より
(*)は $-1 \leqq s \leqq 1$ で常に $t = \frac{\sqrt{3}}{6}s^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$
に接する曲線である。
その接点は $\frac{s+3}{2}$。
また、線分PQは、$y \geqq \sqrt{3}x$ かつ $y \geqq -\sqrt{3}x$ を満たす
領域にある。
図示すると、